Данная серия методичек посвящается лучшему преподавателю по электроду

Семинарист: Добрый день! Давайте решать задачку 22.1. (Пишет номер задачи). Кстати, кто-нибудь изучал китайский язык? А то иногда попадаются люди, которые изучали китайский, японский, корейский. (И далее рассказ про языки, спустя 20 мин он всё же возвращается к 22.1).

На семинаре 22 мы также будем решать задачи методами ММФ, но этот раз уже с диэлектриками, а не проводниками. У нас появится вектор электрической индукции **D**, которого раньше не было. И хотелось бы всё-таки с ним познакомиться, понять его физический смысл. Поэтому сейчас будет большое лирическое отступление. Читатель, конечно, может его пропустить и перейти сразу к решению задач, только пусть потом не спрашивает «А почему я должен принять на веру этот неочевидный факт?» и «Откуда это следует?».

У нас есть некое вещество, которое мы поместили под внешнее электрическое магнитное поле. Это внешнее поле описывается **D**(**r**, t) и **H**(**r**, t) (в вакууме они равны E и B). Мы туда засунули кусочек вещества. Например, мы находимся над землёй вблизи шпиля Останкинской телебашни, откуда во все стороны уходит «Время» с Екатериной Андреевой (это мощные электромагнитные волны), а мы машем вокруг шпиля кусочком, например, деревянным бруском.
Вещество состоит из атомов и молекул. Под действием электрического поля электронные оболочки поляризуются, а под действием магнитного поля электронные оболочки начинают вращаться. Тем самым вещество создаёт своё электрическое и магнитное поле.
Собственное электрическое поле вещества – это какой-то вектор. Обозначим его 4π(-**P**(**r**, t)).
Собственное магнитное поле вещества – это также какой-то вектор. Обозначим его 4π**M**(**r**, t).
Почему 4π? А это вечная проблема. Определишь так – вылезет в одном месте, определим так – вылезет в другом. Мы могли бы ввести вектора **-P** и **M** без ввода 4π, но тогда он вылезет в другом месте.
Почему у **P** минус, скажу чуть позже.
Суммарное магнитное поле внутри бруска будет сумма поля от телепередачи **H**(**r**, t) и поля от атомов дерева 4π**M**(**r**, t). Это суммарное поле обозначим как **B**(**r**, t) и оно представляет собой сумму двух полей: **B**(**r**, t)= **H**(**r**, t)+ 4π**M**(**r**, t).
Аналогично суммарное электрическое поле будет сумма поля от телепередачи **D**(**r**, t) и поля от дерева 4π(-**P**(**r**, t)). Это суммарное поле обозначим как **E**(**r**, t) и оно представляет собой сумму двух полей: **E**(**r**, t)= **D**(**r**, t)+ 4π(-**P**(**r**, t)).

Итак, формулы:
B(**r**, t)= **H**(**r**, t) + 4π**M**(**r**, t).
E(**r**, t)= **D**(**r**, t) + 4π(-**P**(**r**, t)).

Вопрос 1: если вы экспериментально захотите померить электрическое и магнитное поле внутри бруска
(электрическое – как отношение силы Кулона к пробному заряду, магнитное – как отношение силы Ампера, действующее на маленькое колечко с током, к его магнитному моменту)
Что вы измерите – E, B, D, H?
Ответ: именно **E** и **B** – суммарное итоговое поле! На точечный заряд действует и внешнее поле, и поляризованные атомы, и мы измерим именно суммарное поле. На колечко с током действует и внешнее поле, и атомы с вращающимися электронами, и мы измерим именно суммарное поле.

Вопрос 2: а почему в одном случае знак плюс, а в другом минус? Почему у вектора **P** вообще этот минус торчит?
Ответ: очень важный вопрос. Иногда бывает, что «исторически сложилось», причём исторически сложилось не совсем удачно. Было бы удобнее, если бы в физике вместо вектора **P** был вектор **Ь**, равный по определению **–P**. Тогда везде были бы плюсы:
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$.
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{Ь}(\mathbf{r}, t)$.

Однако, как правило, среда (диэлектрическая) ***электрическое*** поле ослабляет, а не усиливает. **P** будет величиной положительной, а **Ь** отрицательной. Поэтому и предпочли в итоге P, а не Ь:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$.

Иная ситуация с магнетизмом. Большинство сред почти не меняют магнитное поле, но есть такие вещества – ферромагнетики – которые его как резко усиливают. Представим себе катушку с железным сердечником. Ток по виткам создал внутри поле **H** (по закону Био-Савара-Лапласа), сердечник его усилил (в очень грубом приближении можно считать для ферромагнетиков $\mathbf{M}=(\mu-1)\mathbf{H}$, где μ очень велико), и итоговая магнитная индукция **B** (которая тогда будет $\mu\mathbf{H}$) будет очень большой. И если мы начнём мерить силу Лоренца или Ампера внутри сердечника, мы получим ахренеть как много, хотя витки нам создали не так уж и много напряжённости. Как говорится, **H** создаётся, а **B** действует (и именно её мы поэтому меряем экспериментально).

Внешнее поле	Среда добавила	Итого в среде получили
H	$4\pi\mathbf{M}$	**B**
D	$4\pi\mathbf{Ь}$ (или отняла $4\pi\mathbf{P}$)	**E**

Как мы видим, последствием неудачного знака у P стала путаница с тем, что понятия индукции и напряжённости оказались перепутанными для электричества и магнетизма. Исторически фигово сложилось, да.

Теперь давайте двинемся к уравнениям Максвелла для сред (их ещё называют уравнениями Максвелла-Лоренца). Чему равно суммарное поле в среде? **E** и **B**. Пишем для них уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\{<\vec{j}_{\text{своб}}> + <\vec{j}_{\text{связ}}>\} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\{<\rho_{\text{своб}}> + <\rho_{\text{связ}}>\}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

Они по-прежнему верны и в среде! Причина, по которой мы хотим их переписать, такова: работать со связанными зарядами и токами очень неудобно, и мы очень хотим от них избавиться.

В первом уравнении $\operatorname{rot} \vec{B}$=rot(**H**)+rot(4π**M**). Угадайте, какому слагаемому соответствует $4\pi\mathbf{j}_{\text{своб}}$, а какому $4\pi\mathbf{j}_{\text{связ}}$? Ну конечно, **H** от внешних (свободных) зарядов, а **M** – это токи у атомов (конечно, связанные, потому что атомы сидят на месте). Давайте выкинем $4\pi\mathbf{j}_{\text{связ}}$, тогда из левой части выкинется создаваемое ими магнитное поле rot(4π**M**) и останется лишь rot(**H**). Получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

(**j** и ρ без индекса Денисов и Соколов обозначают именно всё, связанное со свободой).

Аналогичную процедуру проделаем и со вторым уравнением: div **E** = div **D** + div (4π**Ь**), выкидываем из левой части div (4π**Ь**), из правой $4\pi\rho_{\text{связ}}$ – и вот

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho,$$

А в третьем и четвёртом уравнении ничего связанного нет, их можно и не менять.

Поздравляю, мы получили уравнения Максвелла-Лоренца:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

Теперь вы, если что, сможете быстро их написать на экзамене, написав сначала для **E** и **B**, а потом «усушив» первые два уравнения.

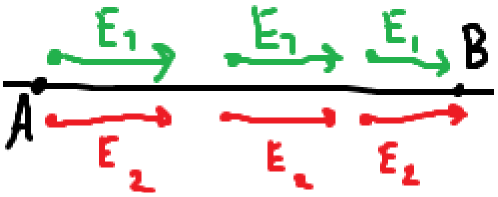
$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ - вектор электрической индукции.
$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ - вектор напряженности магнитного поля.

Теперь давайте поговорим про т.н. материальные уравнения.
Среды делятся на изотропные и на неизотропные.
В изотропных средах всё просто: отклик среды прямо пропорционален внешнему полю.
Тогда… открываем учебник Соколова и видим
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \ \vec{B} = \mu\vec{H}.$
Ну кхм! Формально оно верно, но вот ***физический смысл у этих уравнений разный***.
Разберём сначала второе уравнение: внешнее поле (от телепередачи, или от витков катушки, в зависимости от того, какой вам опыт больше нравится ☺) было **H**, среда магнитное поле **УСИЛИЛА** в μ раз, получили **B**.

В случае с первым уравнением было изначально **D**, пришла среда, **ОСЛАБИЛА** поле в ε раз, в итоге поле усохло до **D**/ε, и именно это и есть **E**, которую мы померяем экспериментально. Таким образом, было бы правильней писать **E**=**D**/ε.

Теперь перейдём к граничным условиям, которые нам пригодятся при решении задач.
Пусть есть две среды: первая с ε_1, а вторая ε_2.
Тогда на границе раздела сред сохраняется нормальная составляющая **D** и поверхностная **E**:
$\mathbf{D_{1n}=D_{2n}}$, $\mathbf{E_{1п}=E_{2п}}$. (п – поверхностная, n – нормальная).
Обсудим, почему это так:

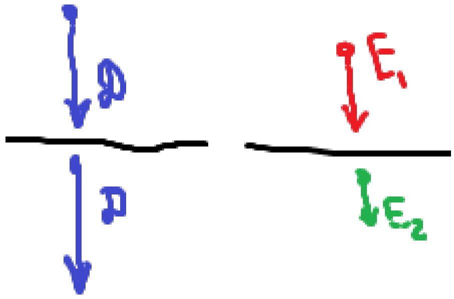
Почему сохраняется поверхностная составляющая **E**? Это следствие непрерывности потенциала. В самом деле, пройдём из точки A в точку B, где A и B лежат на поверхности:



Мы можем идти в верхнем диэлекторике по зелёным стрелочкам, а можем в нижнем (по красным). φ(B) будет отличаться от φ(A) на интеграл напряжённости по этим стрелочкам. Если красные стрелочки будут отличаться от зелёных, то интеграл в двух диэлектриках будет различный и

условие непрерывности потенциала в точке B будет нарушено. А разрывный потенциал недопустим (хотя бы потому, что возникает бесконечная **E**).
Т.е. условие $\mathbf{E_{1п}}$=$\mathbf{E_{2п}}$ эквивалентно условию непрерывности потенциала на границе ($\varphi_1 = \varphi_2$).

Теперь про второе условие: На поверхности двух диэлектриков нормальная к поверхности составляющая D сохраняется.
И это вполне очевидно, если мы вспомним физический смысл D – это поле, если бы среда исчезла, а остались лишь свободные заряды (при их наличии).



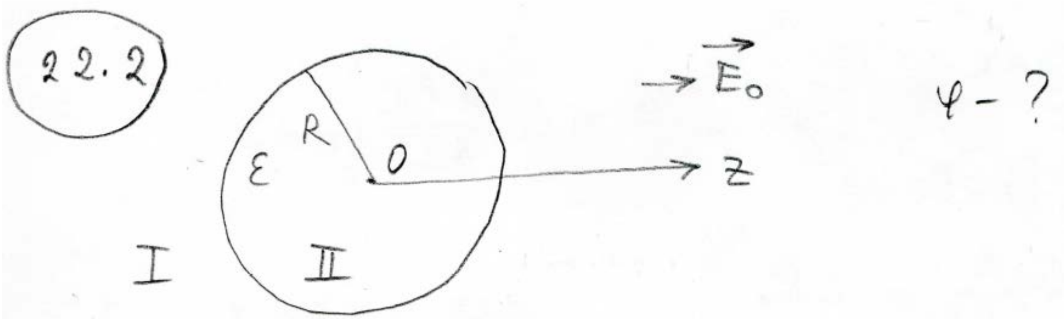
Пусть раньше было два диэлектрика. Поле было – см. правая картинка – красные и зелёные стрелки.
Пусть среда исчезла бы. Будет только вакуум, и поле будет – см. левая картинка – синие стрелки. Это поле в вакууме. Естественно, граница уже виртуальная (среды исчезли, и граница вместе с ними), и поле D (по крайней мере, нормальная его составляющая) одно и то же по обе стороны виртуальной границы.

(На лекциях эта формула записывается чуть иначе, для более общего случая: скачок $D_n = 4\pi\rho$. Это более общий случай, когда на границе ещё есть тоненькая пластина чего-либо с закреплёнными зарядами. Они не индуцированы (!!!), просто мы внесли между двумя диэлектриками слой с уже заранее заготовленными зарядами (сэндвич такой получился). Тогда у D_n будет скачок. Но если такого нет, то и скачка D_n нет).

В частности, если первая среда имеет ε1, а вторая ε2, то D_1=D_2 равносильно $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$.
На языке потенциалов (а именно его мы и будем применять в задачах) это ГУ записывается через производные по нормали: $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$.
Итак, подытожим: потенциал на границе сред сохраняется ($\varphi_1 = \varphi_2$), а вот его производные по нормали могут испытывать скачок: $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$.

ЗАДАЧА 22.2

22.2. Шар радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ помещен в однородное внешнее электрическое поле $\vec{E}_0$. Найти потенциал.



Мы уже решали похожую задачу, где у нас шар был проводником. Вспомним, как мы её решали. Решали уравнение Лапласа, получали

$$\varphi(z,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n z^n + B_n \frac{1}{z^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) + A_0 + B_0 \ln z$$

Но т.к. внешнее поле имеет вид

$$\varphi_{внеш} = -(\vec{E}_0\vec{r}) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

То давайте искать и суммарный потенциал в виде

$$\varphi = \left(\frac{A}{r^2} + Br\right)P_1(\cos\theta) = \left(\frac{A}{r^2} + Br\right)\cos\theta$$

Отметим, что константы A и B разные для потенциала внутри шара и снаружи. Пусть φ_1 потенциал снаружи, а φ_2 внутри. Тогда

$$\varphi_1 = \left(Br + \frac{A}{r^2}\right)\cos\theta, r \geq R$$

$$\varphi_2 = \left(Kr + \frac{L}{r^2}\right)\cos\theta, r \leq R$$

В частности, снаружи шара, устремляя r к бесконечности, мы должны получать $-E_0 r\cos\theta \Rightarrow B=-E_0$. Внутри шара мы такое условие написать, естественно, не можем.

$$\varphi_{I} = \left(-E_0 r + \frac{A}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\varphi_{II} = \left(\frac{K}{r^2} + Lr\right)\cos\theta$$

Зато можем написать другое условие – K=0, иначе у слагаемого K/r^2 возникают большие проблемы при r->0.

Итак, нам надо определить всего две константы:

$$\varphi_I = \left(-E_0 r + \frac{A}{r^2}\right)\cos\theta$$

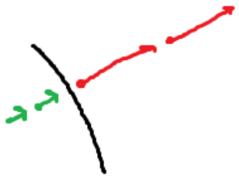
$$\varphi_{II} = L r \cos\theta$$

Их определим из ГУ. Вспоминаем то, что я говорил перед решением задач! Вот они, два ГУ на потенциал:

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} \big|_{r=R} \\ D_r^{I} = D_r^{II} \big|_{r=R} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

первое - $\varphi_I = \varphi_{II}$ - условие непрерывности потенциала

второе – условие ослабления нормальной составляющей E внутри

диэлектрика: 

Определяем константы:

$$\begin{cases} -E_0 R + \dfrac{A}{R^2} = LR \\ -E_0 - \dfrac{2\varepsilon A}{R^3} = \varepsilon L \end{cases} \rightarrow A = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 R^3, \quad L = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2}$$

Подставляем, получаем ответ:

$$\varphi_I = \left(-E_0 r + \frac{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\varphi_{II} = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} r \cos\theta$$

Частные случаи:

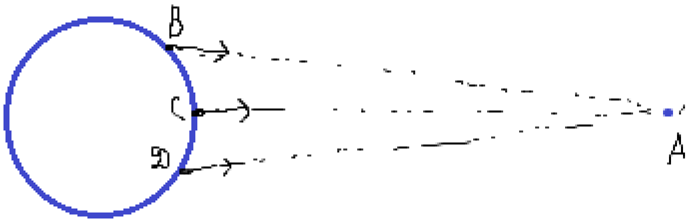
Вакуум, $\varepsilon=1$: $\varphi_I=\varphi_{II}=-E_0 r\cos\theta$

Проводник, ε->бесконечности: $\varphi_I=E_0 \cos\theta *(-r + R^3/r^2)$, $\varphi_{II}=0$.

ЗАДАЧА 22.3

22.3. Найти силу и потенциальную энергию взаимодействия незаряженного диэлектрического шара радиуса R и удаленного от его центра на расстояние a точечного заряда q ($a \gg R$).

Оказывается, поле от точечного заряда можно считать плоским. Действительно, если мы сделаем рисунок



то стрелочки напряжённостей будут почти параллельны и равны по модулю, т.е. поле можно будет считать однородным. А значит, пользуемся результатами 22.2, где мы подсчитали потенциал в любой точке. Нам нужен потенциал в точке А – точнее, не сам он, а Е, т.е. градиент.

$$\varphi_I = \left(-E_0 r + \frac{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0 R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

Так, стоп. Первое слагаемое – это само внешнее однородное поле, т.е. поле точечного заряда. Не будем же считать, как заряд действует сам на себя? Выкидываем. Ну и cos θ = 1 в силу a<<R.

$$\varphi_I = \frac{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0 R^3}{r^2}$$

Теперь берём градиент.

$$-\vec{\nabla}\varphi_{\text{возм}} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} R^3 E_0 \left\{ \frac{3z(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{r^5} - \frac{\vec{e}_z}{r^3} \right\}$$

$$\vec{F}_q\Big|_{\substack{x=y=0\\ z=-a}} = (\varepsilon-1)\, q\frac{E_0 R^3}{\varepsilon+2}\left(\frac{2}{a^3}\right)\vec{e}_z$$

Осталось избавиться от Е0. Это поле от нашего заряда вблизи шара, т.е. q/a^2. Заменяем Е0 на q/a^2, получаем ответы:

$$\vec{F}_q\Big|_{\substack{x=y=0\\ z=-a}} = \frac{2(\varepsilon-1)q^2R^3}{(\varepsilon+2)\,a^5}\vec{e}_z \sim \frac{1}{a^5}$$

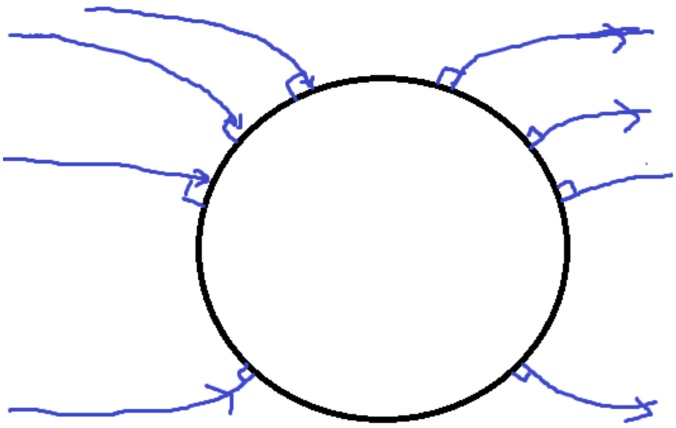
$$\mathcal{E}_{int} = -\int_{-\infty}^{-a} F_z(z)\,dz = -\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}q^2R^3\int_{-\infty}^{-a}\frac{dz}{z^5} = \frac{(\varepsilon-1)q^2R^3}{2(\varepsilon+2)a^4} \sim \frac{1}{a^4}$$

ЗАДАЧА 22.1

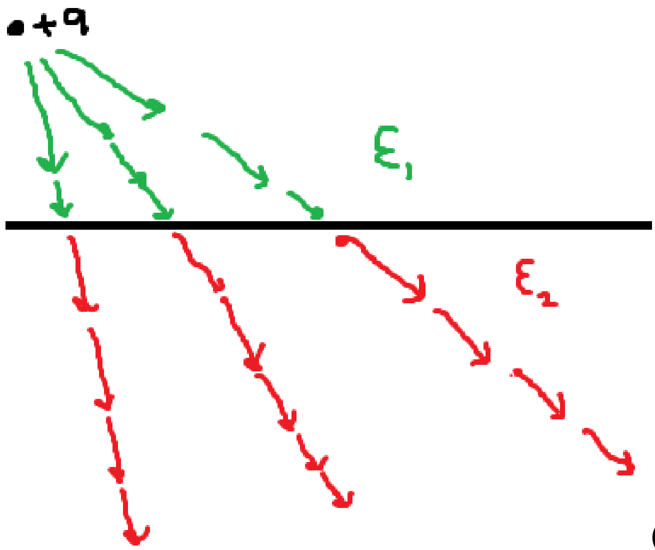
22.1. Заряд q расположен на расстоянии a от плоской границы раздела двух полупространств, заполненных веществом с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2, соответственно. Найти потенциал в каждой области и силу, действующую на заряд.

Это задача резко отличается от всех остальных в этом семинаре. Те решались методами ММФ, здесь же – методом изображений, т.е. методом «нетрудно заметить, что».

Может сложиться впечатление, что диэлектрик занимается только тем, что тупо уменьшает модуль поля (не меняя его направления). Т.е. было поле, диэлектрик его уменьшил в ε раз, а мы это «старое» поле обозначаем как **D.**
Это не так, и не так становится как раз в случае, когда у диэлектрика появляются границы.
Например, проводник не тупо зануляет поле внутри себя, а вдобавок искажает его вокруг:



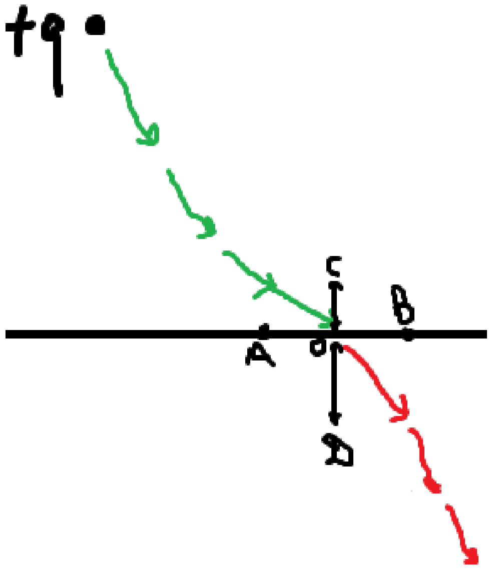
Точно так же искажает поле диэлектрик.
Вот вам пример НЕПРАВИЛЬНОЙ картинки к этой задаче:



(на ней ε1>ε2).

Такая картинка, хоть удовлетворит $\mathbf{D}_{1\text{н}}=\mathbf{D}_{2\text{н}} \Leftrightarrow \varepsilon_1 \mathbf{E}_{1\text{н}}=\varepsilon_2 \mathbf{E}_{2\text{н}}$, но не удовлетворит $\mathbf{E}_{1\text{п}}=\mathbf{E}_{2\text{п}}$, что недопустимо (условие $\mathbf{E}_{1\text{п}}=\mathbf{E}_{2\text{п}}$ мастхэв – потенциал должен быть непрерывен).

Реальная картина выглядит как-то так:



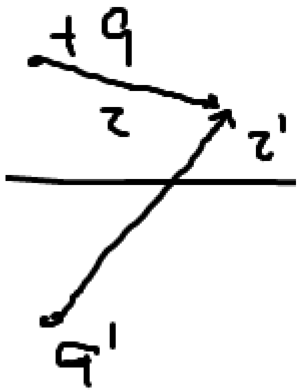
Длины отрезков OA и OB равны (поверхностная составляющая сохраняется), а вот OC и OD нет (их отношение есть отношение $ы_1/ы_2= (1/\varepsilon1)/(1/\varepsilon2)$.

Как же такое просчитать? Через потенциал φ. Какие на него должны быть требования? Во-первых, гармоничность: $\Delta\varphi=0$ везде, где нет зарядов. Упс: у нас в одной точке есть заряд… Давайте сделаем $\varphi=u+q/(\varepsilon_1 r)$. Вот, теперь $\Delta u=0$.

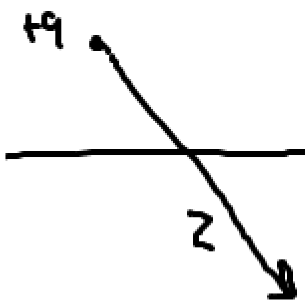
Ещё, конечно же, ГУ: $\varphi_1= \varphi_2$, $\varepsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$.

Всё. Получили задачу по ММФ. Можно пытаться её решать (вероятно, лучше всего это сделать в цилиндрической СК). Но Соколов, Чугреев и даже Ландау-Лифшиц (8-й том, 64-я страница, в старых изданиях чуть раньше) предлагают иной метод:

Нетрудно заметить, что поле в нашей задаче в верхнем диэлектрике эквивалентно полю, создаваемому исходному заряду и его изображению:



, а в нижнем диэлектрике $q/(\varepsilon_{эфф} r)$:



Бессмысленно задавать вопросы «откуда взялось изображение», «почему изображение действует только на верхний диэлектрик, а в нижнем его нет». Откуда? Нетрудно заметить. что!

Утверждается, ***что будем искать потенциал φ вот в таком виде:***

$$\varphi_I = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \frac{q'}{r'}; \quad \varphi_{II} = \frac{q}{\varepsilon_{эфф} r}$$

Почему именно в таком? Бог нам во сне приснился и сказал, что так надо? ☺ ☺ В этом суть метода «нетрудно заметить, что», частным случаем которого является метод изображений.

А далее из ГУ находят 2 константы: q' и $\varepsilon_{эфф}$. ГУ у нас как раз два уравнения:

$\varphi_1 = \varphi_2$, $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$.

Два уравнения на две неизвестных – то, что надо.

Также надо сказать, почему φ в таком виде является гармоничной функцией везде, кроме места, где расположен заряд. Функции C/r гармоничны везде, кроме r=0. Но в φ_{II} r всегда >0, в первом диэлектрике r' всегда >0, осталось $\frac{q}{\varepsilon_1 r}$, но так и должно быть – в одной точке верхнего диэлектрика у нас как раз заряд.

Резюме! Решение подобных задач вы можете искать или в духе ММФ (переходите в нужную СК, решаете там уравнение Лапласа), или «тыкнем куда-нибудь изображения, и пытаемся подогнать константы так, чтобы ГУ выполнялись».

Да, и вот окончание решения 22.1 из Ландавшица:

1. Определить поле, создаваемое точечным зарядом e, расположенным на расстоянии h от плоской границы раздела двух различных диэлектрических сред.

Р е ш е н и е. Назовем точку, в которой находится заряд e в среде *1*, точкой O, а ее зеркальное отображение по другую сторону плоскости раздела (в среде *2*) — точкой O' (рис. 11). Будем искать поле в среде *1* как поле, создаваемое двумя точечными зарядами,— зарядом e и фиктивным зарядом e' в точке O' (ср. метод изображений, § 3):

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{e'}{\varepsilon_1 r'},$$

где r, r' — расстояния точки наблюдения соответственно от O и O'. Поле же в среде 2 ищем в виде поля, создаваемого фиктивным зарядом e'', находящимся в точке O:

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}.$$

На граничной плоскости ($r = r'$) должны выполняться условия (7,5), из которых получаем уравнения

$$e - e' = e'', \quad \frac{e + e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2};$$

отсюда

$$e' = e\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad e'' = e\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{1}$$

При $\varepsilon_2 \longrightarrow \infty$ имеем $e' = -e$, $\varphi_2 = 0$, т. е. мы возвращаемся к результату, полученному в § 3 для поля точечного заряда вблизи проводящей плоскости.

Сила, действующая на заряд e (*сила изображения*), равна

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2 \varepsilon_1} = \left(\frac{e}{2h}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)};$$

$F > 0$ соответствует отталкиванию.

2. То же для бесконечной прямой заряженной нити, расположенной параллельно плоскости раздела на расстоянии h от нее.

Решение вполне аналогично решению предыдущей задачи, с той разницей, что потенциалы поля в обеих средах:

$$\varphi_1 = -\frac{2e}{\varepsilon_1}\ln r - \frac{2e'}{\varepsilon_1}\ln r', \quad \varphi_2 = -\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r,$$

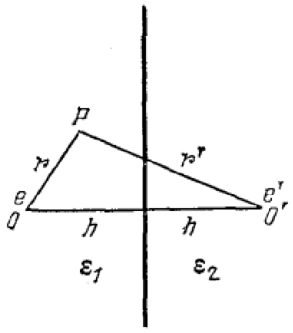


Рис. 11

где e, e', e'' — заряды на единице длины нити и ее «изображений», а r, r' — расстояния в плоскости, перпендикулярной к нитям. Для e, e', e'' получаются те же выражения (1), а сила, действующая на единицу длины нити,

$$F = \frac{2ee'}{2h\varepsilon_1} = \frac{e^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{h\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

ЗАДАЧА 22.5

22.5. В шаре радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ свободные заряды распределены по закону: $\rho = \rho_0 r \cos\theta$. Найти потенциал.

В 22.5 мы возвращаемся к старым-добрым ММФ. Поставим задачу:

$$\Delta\varphi^{II} = -\frac{4\pi\rho_0 r\cos\theta}{\varepsilon} \qquad r < R$$

$$\Delta\varphi^{I} = 0 \qquad r > R$$

ГУ $\quad \varphi^{I} = \varphi^{II}\Big|_{r=R} \qquad \frac{\partial\varphi^{I}}{\partial r} = \varepsilon\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial r}\Big|_{r=R}$

Снаружи шара зарядов нет, там уравнение Лапласа Δφ=0, для которого у нас есть готовое решение из ММФ:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

Учитывая, что слагаемых с cos 2θ, cos 3θ у нас в ГУ нет, будет разумно ограничиться слагаемыми с cos θ:

$\varphi(r,\theta) = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right) cos\theta$

Это, конечно, хорошо, снаружи φ мы нашли. А внутри уравнение Пуассона, которое отличается от уравнения Лапласа Δφ=0 наличием неоднородности:

$$\Delta\varphi^{II} = \boxed{-\frac{4\pi\rho_0 r\cos\theta}{\varepsilon}}$$ неоднородность!

А уравнения Пуассона на ММФ не было, поэтому будем действовать экспромтом, подрубив русскую смекалочку и метод разделения переменных: Будем искать решение в виде φ(r,θ)=f(r)cos(θ).

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)cos\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial f(r)cos\theta}{\partial\theta}\right) = -\frac{4\pi\rho_0 r cos\theta}{\varepsilon}$$

Упрощаем:

$$\frac{cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) + \frac{f(r)}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin^2\theta) = -\frac{4\pi\rho_0 r cos\theta}{\varepsilon}$$

И ещё упрощаем:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) - \frac{2f(r)}{r^2} = -\frac{4\pi\rho_0 r}{\varepsilon}$$

θ ушло, мы получили одномерный ДУ относительно r:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) - 2f(r) = -\frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon}$$

Будем искать его решение в виде

$f(r) = ar^b$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial ar^b}{\partial r}\right) - 2ar^b = -\frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon}$$

$$a\frac{\partial}{\partial r}(br^{b+1}) - 2ar^b = -\frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon}$$

$$ab(b+1)r^b - 2ar^b = -\frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon}$$
$$=> b = 3, a = \frac{-2\pi\rho_0}{5\varepsilon}$$

Ура, мы нашли решение внутри шара:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{-2\pi\rho_0}{5\varepsilon} r^3 cos\theta$$

Оно не единственное (мы нашли лишь частное решение!), к нему можно прибавить любую гармоническую функцию, т.е. ту, для которой Δφ=0, т.е. такого вида: $\left(K_1 r + \frac{L_1}{r^2}\right) cos\theta$

Подытожим:

$\varphi(r,\theta) = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right) cos\theta$ снаружи шара

$\varphi(r,\theta) = \left(К_1 r + \frac{L_1}{r^2} - \frac{2\pi\rho_0}{5\varepsilon} r^3\right) cos\theta$ внутри шара

А теперь для нахождения констант подставляем ГУ:

1) При r->0 у $\frac{L_1}{r^2}$ большие проблемы. Зануляем L_1. Итого:

$\varphi(r,\theta) = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right) cos\theta$ снаружи шара

$\varphi(r,\theta) = \left(К_1 r - \frac{2\pi\rho_0}{5\varepsilon} r^3\right) cos\theta$ внутри шара

2) При r->+∞ $\varphi(r,\theta) \to 0$ (чем дальше от шара, тем слабее потенциал, поэтому и φ должен $\to$ 0). Следовательно, A_1=0. Получаем

$\varphi(r,\theta) = \frac{B_1}{r^2} cos\theta$ снаружи шара

$\varphi(r,\theta) = \left(К_1 r - \frac{2\pi\rho_0}{5\varepsilon} r^3\right) cos\theta$ внутри шара

3) При r=R должны выполняться условия сшивки:

$$\varphi^{I} = \varphi^{II}\Big|_{r=R} \qquad \frac{\partial \varphi^{I}}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

Два уравнения, две неизвестных B1 и K1. Если решить систему из 2 уравнений и найти B1 и K1, то получим ответ:

Ответ: $\begin{cases} \varphi^{II} = \dfrac{2\pi\rho_0 r\cos\theta}{5\varepsilon}\left[\dfrac{(3\varepsilon+2)R^2}{\varepsilon+2} - r^2\right] \\ \varphi^{I} = \dfrac{4\pi\rho_0 R^5\cos\theta}{5(\varepsilon+2)r^2} \end{cases}$